Kalkulus tizenötödik feladatsor - megoldások

Globális szélsőérték, Taylor-polinomok

1. Határozza meg az f függvény globális szélsőértékeit az adott I intervallumon!

   a) $f(x) = x^2\, e^{-3x}$, $I = [0{,}1]$ (Mo: Kónya, 77o.)

   b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$, $I = [-1{,}3]$

   c) $f(x) = x^3 + \frac{48}{x^2}$, $I = [1{,}3]$ (Mo: Kónya, 76o.)

   Megoldás:

   b) A feladat: abszolút/globális szélsőérték-keresés korlátos, zárt intervallumon. f folytonos, így a Weierstrass-tétel alapján f-nek az I intervallumon létezik maximuma és minimuma. Mivel f differenciálható is, így az előadás alapján szélsőértékhelye vagy az intervallum végpontjaiban lehet, vagy ott, ahol f deriváltja nulla. Keressük meg az f' gyökeit:

   $$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2) = 0.$$

   Tehát f' zérushelyei: $x = 1 \in I$ és $x = -2 \notin I$.
   Így a lehetséges szélsőértékhelyek az intervallum végpontjai: $x = -1$, $x = 3$ és az intervallum belsejében: $x = 1$. Ezen három hely függvényértékét versenyeztetve:

   $f(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) - 1 = 12$
   $f(3) = 2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 - 12\cdot 3 - 1 = 44 \Rightarrow$ max. hely: $x = 3$ és max. érték: 44
   $f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 - 1 = -8 \Rightarrow$ min. hely: $x = 1$ és min. érték: -8

2. Legfeljebb mekkora lehet a derékszögű háromszög területe, ha az egyik befogójának és az átfogójának az összege 10 cm?

   Megoldás:

   Jelölje x a háromszög egyik befogóját és y a másik befogót, z pedig az átfogót. A feltétel miatt akkor az átfogó $z = 10 - y$, míg a másik befogó a Pitagorasz-tétel ($x^2 + y^2 = z^2$) alapján:

   $$x^2 + y^2 = z^2 = (10-y)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 100 - 20y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100 - x^2}{20}.$$

   Írjuk fel a háromszög területének képletét: $T = \frac{xy}{2}$ és felhasználva hogy $y = \frac{100-x^2}{20}$, a terület:

   $$T(x) = xy = \frac{x}{40}(100 - x^2) = \frac{5x}{2} - \frac{x^3}{40}.$$

Itt $0 \leq x \leq z \leq 10$, ezért a feladatunk az, hogy megkeressük a T folytonos függvény globális maximumát az $I = [0, 10]$ korlátos, zárt intervallumon. A Weierstrass-tétel szerint van maximum, hiszen T folytonos. A maximum vagy az intervallum végpontjaiban lehet, vagy olyan pontban, ahol a T függvény deriváltja nulla. Keressük meg a T' gyökeit:

$$T'(x) = \frac{5}{2} - \frac{3x^2}{40} = 0$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3x^2}{40} = 0 \Leftrightarrow 100 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \in I$$

Mivel $T(0) = 0$, $T(10) = 0$ és

$$T\Big(\frac{10}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{10}{40\sqrt{3}}\big(100 - \frac{100}{3}\big) = \frac{50}{3\sqrt{3}} > 0,$$

így $\frac{10}{\sqrt{3}}$ a maximum hely és $T\big(\frac{10}{\sqrt{3}}\big) = \frac{50}{3\sqrt{3}}$ a terület maximális értéke. Tehát a terület akkor maximális, ha

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{100 - x^2}{20} = \frac{10}{3}, \qquad z = 10 - y = \frac{20}{3}.$$

(Megjegyzés1: ez pont a szabályos háromszög félbevágva!)

(Megjegyzés2: $x = 0$-ra és $x = 10$-re elfajuló háromszögek lennének!)

3. Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64 + l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

   Megoldás:

   Tegyük fel, hogy a vödörbe l liter víz fér, akkor $\frac{10000}{l}$ fordulóra lesz szükség (hiszen (vödör mérete)$\cdot$(fordulók száma)$=$10000). A teljes munka így $\frac{10000}{l} \cdot (64 + l^2)$ ideig tart.

   Tehát a feladat: meg kell határoznunk az $F(l) = \frac{10000}{l} \cdot (64 + l^2) = 10000\big(\frac{64}{l} + l\big)$ függvény minimumát, ahol $l > 0$. Vigyázat, itt a $(0, +\infty)$ nem korlátos intervallumon keresünk minimumhelyet! Most ott lehet szélsőértékhely, ahol F deriváltja nulla.

   $$F'(l) = 10000\Big(\frac{-64}{l^2} + 1\Big) = 10000\Big(\frac{-64 + l^2}{l^2}\Big) = 0.$$

   Megoldva: $l^2 = 64$, azaz $l = \pm 8$, de csak $l = 8 > 0$ lehet. Azt kaptuk, hogy csak $l = 8$-ban lehet F-nek szélsőértéke. Mivel $F''(l) = 10000 \cdot \frac{128}{l^3}$ és $F''(8) = 10000 \cdot \frac{128}{8^3} > 0$, ezért F-nek $l = 8$-ban lokális minimum helye van, az F' segítségével elvégzett monotonítás vizsgálatból arra következtethetünk, hogy ez globális munimum hely.

4. Számítsuk ki az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli n-edfokú Taylor-polinomját!

a) $f(x) = \cos x$, $n = 5$

b) $f(x) = e^x$, $n = 7$

c) $f(x) = e^{5x}$, $n = 4$

d) $f(x) = \sinh(x)$, $n = 5$

e) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $n = 4$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $n = 4$

g) $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 4$

Azt is becsüljük meg, hogy mekkora hibát vétünk, ha a függvényértéket 0.1-ben ezen polinommal közelítjük!

Elmélet:

Egy függvény n-ed fokú Taylor polinomja az x_0 középponttal:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

azaz

$$T_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Tétel a Lagrange-féle maradéktagról:

Ha f $(n+1)$-szer differenciálható $[x_0,x]$-en, akkor létezik egy c szám x és x_0 között, melyre

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Megoldás:

a) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra az x_0 helyen, $n = 0,1,\ldots,5$.

$$\begin{array}{ll}
f^{(0)}(x) = f(x) = \cos x & \Rightarrow f(x_0) = f(0) = \cos 0 = 1 \\
f^{(1)}(x) = f'(x) = -\sin x & \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -\sin 0 = 0 \\
f^{(2)}(x) = f''(x) = -\cos x & \Rightarrow f''(x_0) = -1 \\
f^{(3)}(x) = \sin x & \Rightarrow f^{(3)}(x_0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos x & \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = 1 \\
f^{(5)}(x) = -\sin x & \Rightarrow f^{(5)}(x_0) = 0
\end{array}$$

Tehát a képlet alapján:

$$T_5(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5,$$

azaz

$$T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(Észrevétel: $f(x) = \cos x$ esetén $T_5(x) = T_4(x)$.)

$f^{(6)}(x) = -\cos x$ is kell, mert a hibabecsléshez felhasználjuk a maradéktagos formulát: létezik egy c szám x és 0 között, melyre

$$R_5(x) = f(x) - T_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6,$$

vagyis

$$|R_5(x)| = |\cos x - \big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\big)| = \Big|\frac{-\cos(c)}{6!}x^6\Big|.$$

A hibabecslés az $x = 0.1$ helyen:

$$|R_5(0.1)| = |\cos(0.1) - \big(1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^4}{24}\big)| = \frac{|\cos c|}{6!}|0.1|^6 \leq \frac{1}{6!} \cdot 0.1^6 = 1.3\dot{8} \cdot 10^{-9},$$

ahol a felső becsléshez felhasználtuk, hogy $c \in (0{,}0.1)$ és az is, hogy $|\cos c| \leq 1$. Tehát ha a függvényértéket a 0.1 helyen az ötödfokú Taylor-polinommal közelítjük, akkor a hiba legfeljebb $1.3\dot{8} \cdot 10^{-9}$. Emellett kaptunk egy becslést $\cos(0.1)$-re is: $\cos 0.1 \approx 1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^4}{24} = 0.9950041\dot{6}$. Valóban, $\cos(0.1) = 0.995004165278..$, így láthatóan a hiba kisebb, mint $1.3\dot{8} \cdot 10^{-9}$.

b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 7$.
Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra az x_0 helyen, $n = 0, 1, \ldots, 7$, de ismert, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $f^{(n)}(x) = e^x$, így minden n-re $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Ezek alapján a hetedfokú Taylor-polinom:

$$T_7(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7,$$

azaz

$$T_7(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7.$$

A hibabecslés az $x = 0.1$ helyen:

$$|R_7(0.1)| = |e^{0.1} - T_7(0.1)| = \frac{|e^c|}{8!}|0.1|^8 \leq \frac{e^{0.1}}{8!} \cdot 0.1^8 = 2.741 \cdot 10^{-13},$$

ahol a felső becsléshez felhasználtuk, hogy $c \in (0{,}0.1)$ és hogy az exponenciális függvény monoton növő, így $|e^c| \leq e^{0.1}$.
A függvényértékre kapott becslés: $e^{0.1} \approx T_7(0.1) = 1.10517$.

c) $f(x) = e^{5x}$, $n = 4$
Végeredmény:

$$T_4(x) = 1 + 5x + \frac{25}{2!}x^2 + \frac{125}{3!}x^3 + \frac{625}{4!}x^4.$$

d) $f(x) = \sinh(x)$, $n = 5$
Végeredmény:

$$T_5(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5.$$

e) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$.

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra az x_0 helyen, $n = 0{,}1,\ldots,4$.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{1+x} & \Rightarrow f(0) = \sqrt{1} = 1 \\
f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \\
f^{(3)}(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{-5}{2}(1+x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} & \Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}
\end{array}$$

Ezek alapján a negyedfokú Taylor-polinom:

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4,$$

azaz

$$T_4(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{4}}{2!}x^2+\frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3-\frac{\frac{15}{16}}{4!}x^4 = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4.$$

$f^{(5)}(x) = \frac{15}{16}\cdot\frac{7}{2}(1+x)^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$, amit a hibabecsléshez használunk fel:

$$R_4(x) = f(x) - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5,$$

ahol c 0 és x között van.

Hibabecslés az $x = 0.1$ helyen:

$$|R_4(0.1)| = |f(0.1)-T_4(0.1)| = \frac{|\frac{105}{32}(1+c)^{-\frac{9}{2}}|}{5!}|0.1|^5 \leq \frac{\frac{105}{32}}{5!}\cdot 0.1^5 = 2.734375\cdot 10^{-7},$$

ahol a felső becsléshez felhasználtuk, hogy $c \in (0{,}0.1)$ és hogy a $c \mapsto \frac{1}{(1+c)^{\frac{9}{2}}}$ függvény monoton fogyó a $(0{,}0.1)$ intervallumon, így $|\frac{105}{32}(1+c)^{-\frac{9}{2}}| \leq \frac{105}{32}1^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32}$ (ha mon. fogyó, akkor a legnagyobb értékét a 0-ban veszi fel).

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $n = 4$

Végeredmény:

$$T_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

g) $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 4$

Végeredmény:

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$